MÁTRIX RANGJA

2004. november 23.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
9. fejezet (Mátrixok rangja);

további ajánlott irodalom:
D. K. Fagyejev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;
3. fejezet, 2. szakasz (A mátrix rangja): 366. - 380. feladat

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;
A Mátrixok c. fejezetben a Négyzetes mátrix determinánsa, a mátrix rangja, a mátrix elemi átalakításai c. szakaszban (a 157. oldaltól, feladatok a 159. oldaltól): 5. - 10., 12. - 13. feladat
A Lineáris egyenletrendszerek vizsgálata c. fejezetben (a 202. oldaltól, feladatok a 212. oldaltól): 5. - 6., 9. - 10., 12. - 15., 17. feladat.

Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
3. fejezet (Lineáris egyenletrendszerek), 4. szakasz (A mátrix rangja): 2. - 3., 5. - 6., 9. - 16. feladat.

További ajánlott feladatok

1. Feladat. Mennyi az alábbi mátrixok rangja?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Feladat. (Freud R. 3.4.11.) Legyen A egy 6×5-ös mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha az első 3 sor összefüggő, akkor a bal fölső 3×3-as aldetermináns 0.
(b) Ha a bal fölső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első 3 sor összefüggő.
(c) Ha az első 3 oszlop összefüggő és az utolsó 3 oszlop is összefüggő, akkor a mátrix rangja legfeljebb 3.
(d) Ha az első 2 oszlop összefüggő és az utolsó 2 oszlop is összefüggő, akkor a mátrix rangja legfeljebb 3.

3. Feladat. Aladár és Béla felváltva írnak be egy 2×2-es táblázatba 0-tól különböző valós számokat. Aladár célja az, hogy a kialakuló 2×2-es mátrix rangja 1 legyen, Béla célja, hogy a rang 2 legyen. Ki nyer, ha Aladár kezd? Ki nyer, ha Béla kezd?

4. Feladat. A p valós paraméter értékétől függően határozza meg a kvetkező mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & p \end{pmatrix}$$

5. Feladat. Válasszuk meg a λ-t úgy, hogy a következő vektorrendszer rangja minimális legyen:

$$a = (1,\ -2,\ \lambda,\ 0), \qquad b = (2,\ \lambda,\ 10,\ 1), \qquad c = (1,\ 14,\ 8,\ 2)\,.$$

6. Feladat. Írjon fel három olyan valós számtest fölötti, 4×3 típusú mátrixot, melyeknek rangja rendre 1, 2 illetve 3.

7. Feladat. Tudjuk, hogy az $\mathbb{R}^4$-beli

$$v_1 = (1, 2, -1, -2), \qquad v_2 = (3, 1, 1, 1) \quad \text{és} \quad v_3 = (-1, 0, 1, -1)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Ennek ismeretében mit mondhatunk a következő mátrix rangjáról:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}?$$

8. Feladat. Határozza meg a B mátrix rangját, majd ezt fölhasználva mutassa meg, hogy a $BX = E_4$ mátrixegyenletnek (ahol E_4 a 4×4-es egységmátrix) nincs megoldása.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 11 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * * * * * * *

Lineáris egyenletrendszerek, Kronecker-Capelli tétel.

9. Feladat. A Kronecker-Capelli tétel kiegészítéseként mutassuk meg, hogy megoldható esetben egy lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha a mátrixának (és a bővített mátrixának közös) rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

10. Feladat. (Freud 3.4.15.) Igazak-e a következő állítások tetszőleges $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer esetén:

(a) Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a bővített mátrixának oszlopai összefüggők.
(b) Ha a bővített mátrixának oszlopai összefüggők, akkor az egyenletrendszer megoldható.
(c) Ha az A mátrix oszlopai függetlenek, akkor az egyenletrendszer megoldható.
(d) Ha az A mátrix sorai függetlenek, akkor az egyenletrendszer megoldható.
(e) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor az A mátrix oszlopai függetlenek.
(f) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor az A mátrix sorai függetlenek.

11. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre?

(a1) Ha végtelen sok megoldás van, akkor $n > m$.
(a2) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
(b1) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
(b2) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
(c1) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
(c2) Ha nincs megoldás, akkor $n < m$.
(d1) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az egyenletrendszer determinánsa 0.
(d2) Ha $n = m$ és az egyenletrendszer determinánsa 0, akkor végtelen sok megoldás van.
(e1) Ha $m = n + 1$ és az egyenletrendszer bővített mátrixának determinánsa nem 0, akkor nincs megoldás.
(e2) Ha $m = n + 1$ és az egyenletrendszer bővített mátrixának determinánsa 0, akkor van megoldás.

12. Feladat. Mely λ értékekre oldható meg a következő lineáris egyenletrendszer?

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 &= \lambda - 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 4x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= \lambda - 1 \end{aligned}$$